# 4. VĚTA O IMPLICITNÍ FUNKCI A LOKÁLNÍM DIFEOMORFISMU

**Věta (o implicitní funkci)**

Nechť
- $X$ NLP; $Y, Z$ – Banachovy prostory,
- $f : X \times Y \to Z$,
- $f(a,b) = 0$ $(a,b \in X \times Y)$,
- $f$ spojité v $(a,b)$
- $f_2'$ existuje na okolí bodu $(a,b)$ a zobrazení $(x,y) \to f_2'(x,y)$ $(X \times Y \to \mathcal{L}(Y,Z))$ je spojité v bodě $(a,b)$
- $f_2'(a,b)$ je prosté zobrazení $Y$ na $Z$ ($\Leftrightarrow f_2'(a,b)$ je izomorfismus $Y$ na $Z$).

Pak

$$\exists \delta, \varepsilon > 0 \ \forall x \in U(a,\delta) \ \exists!\, y \overset{\text{ozn.}}{=} \varphi(x) \in U(b,\varepsilon):$$

$$f(x,y) = f(x,\varphi(x)) = 0$$

Navíc – tímto způsobem definované zobrazení $\varphi : X \to Y$ je spojité v bodě $a$.

Dodatek. Je-li navíc $f \in C^k$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ na nějakém okolí bodu $(a,b)$, lze $\varepsilon$ a $\delta$ volit tak, že

$$\varphi \in C^k(U(a,\delta))$$

## Důkaz věty

a) existence $y$

Definujme pro $x \in X$ zobrazení

$$T_x(y) := y - \left[f_2'(a,b)\right]^{-1} \cdot f(x,y) \quad : Y \to Y$$

a tvrzení věty (o existenci $y$ ...) převedeme na úlohu o pevném bodě zobrazení $T_x$. Budeme aplikovat Banachovu větu o kontrakci (viz NEFN 1, Důsledek 2):

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ T_x : M \to M \\ \bullet\ M \text{ je úplný} \\ \bullet\ T \text{ je kontraktivní} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\, y \in M : T_x y = y$$

i) $T_x$ je kontrakce

$$(T_x)'(y) = I - \left[f_2'(a,b)\right]^{-1} \cdot f_2'(x,y) =$$

$$= \left[f_2'(a,b)\right]^{-1} \cdot \left[f_2'(a,b) - f_2'(x,y)\right]$$

$$\sup_{(x,y) \in U((a,b),r)} \|T_x'(y)\| \overset{\text{ozn.}}{=} q(r) \to 0 \quad \text{pro } r \to 0+$$

(plyne z předpokladu spojitosti $f_2'$ v bodě $(a,b)$)

↳ okolí v sup-normě

$$\|T_x(y_1) - T_x(y_2)\| \leq \sup_{\vartheta \in \langle 0,1 \rangle} \|T_x'(y_1 + \vartheta(y_2 - y_1))\| \cdot \|y_1 - y_2\| \leq$$

věta o přírůstku hodnoty

$$\leq q(r) \cdot \|y_1 - y_2\| \quad \left(\forall (x,y_1), (x,y_2) \in U((a,b),r)\right)$$

(na str. 15)

ii) $\underline{T_x : M \to M}$. Za $M$ zvolíme uzavřenou kouli $\overline{U(b,\varepsilon)}$.

$$\|T_x(y)-b\| \le \|T_x(y)-T_x(b)\| + \|T_x(b)-b\| \le$$

$$\le q(r)\,\|y-b\| + \|[f_2'(a,b)]^{-1}\|\cdot\|f(x,b)\| \qquad (*)$$

$$\|[f_2'(a,b)]^{-1}\|\cdot\sup_{x\in U(a,\delta)}\|f(x,b)\| =: k(\delta) \to 0 \text{ pro } \delta\to 0$$

(plyne ze spojitosti $f$ v $(a,b)$ a z $f(a,b)=0$)

Nyní buď $\varepsilon>0$ takové, že $q(\varepsilon)<\frac{1}{2}$

a vyberme $0<\delta<\varepsilon$ tak, aby $k(\delta)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Pak $\forall x\in U(a,\delta)\ \forall y\in M=\overline{U(b,\varepsilon)}$ platí:

$$\|T_x(y)-b\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Banachova věta o kontrakci:

$$\forall x\in U(a,\delta)\ \exists!\, y\in\overline{U(b,\varepsilon)} : T_x(y)=y$$

$$(\Rightarrow f(x,y)=0)$$

Navíc, pro toto $y$ platí

$$\|y-b\| = \|T_x(y)-b\| < \varepsilon, \text{ takže } \underline{y\in U(b,\varepsilon)}$$

b) Spojitost $\varphi$ v bodě $a$

$$\|\varphi(x)-\varphi(a)\| \le \frac{1}{2}\|\varphi(x)-b\| + \|[f_2'(a,b)]^{-1}\|\cdot\|f(x,b)\|$$

$\varphi(x) = T_x(\varphi(x))$, $\varphi(a) = b$

viz (*) a volba $\varepsilon$ $\left(q(\varepsilon) < \frac{1}{2}\right)$

Odtud

$$\frac{1}{2}\|\varphi(x)-b\| \le \|[f_2'(a,b)]^{-1}\|\cdot\|f(x,b)\|$$

$$\|\varphi(x)-b\| = \|\varphi(x)-\varphi(a)\| \le 2\cdot\|[f_2'(a,b)]^{-1}\|\cdot\|f(x,b)\|$$

$\downarrow$

$0$ pro $x \to a$

(plyne ze spojitosti $f(x,y)$ v bodě $(a,b)$ a z $f(a,b)=0$).

Cbd.

Poznámka k důkazu dodatku

- Je-li $f$ spojitá na okolí bodu $(a,b)$, hledáme – pro každé $x \in U(a,\delta)$ – odpovídající $y = \varphi(x)$ metodou prostých iterací

$$y_0(x) := b,$$

$$y_{n+1}(x) := T_x(y_n) = y_n(x) - [f_2'(a,b)]^{-1}\cdot f(x, y_n(x))$$

Pak

$y_0(x)$ je spoj. $\Rightarrow y_1(x)$ je spoj. $\Rightarrow \dots \Rightarrow y_n(x)$ je spoj. na $U(a,\delta)$

$$\rho(y_n, y_m) = \sup_{x \in U(a,\delta)} \|y_n(x) - y_m(x)\|$$

$y_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ na $U(a,\delta) \Rightarrow$ $\varphi$ je spojitá na $U(a,\delta)$

↳ spojitá

- Je-li $f$ třídy $C^1$ na okolí bodu $(a,b)$,

je $F(x) := f(x, \varphi(x)) \equiv 0$ na $U(a,\delta)$

$\Downarrow$ existuje-li $\varphi'(x)$

$$0 = F'(x) = f_1'(x, \varphi(x)) + f_2'(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

$\Downarrow$

$$\boxed{\varphi'(x) = -\left[f_2'(x, \varphi(x))\right]^{-1} \cdot f_1'(x, \varphi(x))}$$

Poznámka k odvození $f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
(+ $f$ třídy $C^1$ na okolí $(a,b)$)

$$0 = f(x+h, \varphi(x+h)) - f(x, \varphi(x)) =$$

$$= f_x'(\xi, \zeta) \cdot h + f_y'(\xi, \zeta) \cdot [\varphi(x+h) - \varphi(x)]$$

pro nějaké $(\xi, \zeta)$ ležící mezi $(x, \varphi(x))$ a $(x+h, \varphi(x+h))$

Odtud ($f'_y \neq 0$ na nějakém okolí $(a,b)$):

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = -\frac{f'_x(\xi,\zeta)}{f'_y(\xi,\zeta)}, \text{ a proto}$$

$$\boxed{\varphi'(x) = \lim_{h\to 0} \dots = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}}$$

(a pro vyšší derivace indukcí)

---

- **Poznámky k větě o implicitní funkci v $\mathbb{R}^k$**

- $f = f(x,y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f(a,b) = 0, \dots, \dots$

$f'_2(a,b)$ je izomorfismus $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$

$$\Updownarrow$$

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)(a,b)$ je regulární matice $n \times n$

- $f = f(x,y) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \quad n \neq p$

a) $\underline{n < p}$ $\quad f(x,y) := (x, 2y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

b) $\underline{n > p}$ $\quad f(x,y_1,y_2) := y_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\Big\}\ f(0)=0$ ...

## Příklad (aplikace věty o implicitní funkci)

Uvažujme počáteční úlohu

$$(*) \quad \begin{cases} y'(t) = g(t, y) \\ y(0) = x \end{cases}$$

kde $g, \frac{\partial g}{\partial y}$ jsou spojité na $\langle 0,1\rangle \times \mathbb{R}$.

Je známo, že

$y$ řeší $(*) \iff y(t) = x + \int_0^t g(s, y(s))\,ds$,

tj. $\boxed{f(x,y)(t) := y(t) - x - \int_0^t g(s, y(s))\,ds \equiv 0}$

Předpokládejme navíc, že $g(t,0) = 0$ pro každé $t \in \langle 0,1\rangle$.

Pak $f(0,0) = 0$. Pokusme se kjíbit pomocí věty o implicitní funkci, kde pro „malá" $x \in \mathbb{R}$ existuje řešení $y = y(t)$ úlohy $(*)$ na $\langle 0,1\rangle$.

Uvažujme Banachův prostor $C^1(\langle 0,1\rangle)$ s normou

$$\|h\| := \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |h(t)| + \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |h'(t)|$$

Pak:

$$f = f(x,y) : \mathbb{R} \times C^1(\langle 0,1\rangle) \longrightarrow C^1(\langle 0,1\rangle)$$

$$\left(f_2'(x,y)(h)\right)(t) = h(t) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(s, y(s))\, h(s)\, ds$$

$$f_2' = f_2'(x,y) : \mathbb{R} \times C^1(\langle 0,1\rangle) \longrightarrow \mathcal{L}(C^1(\langle 0,1\rangle), C^1(\langle 0,1\rangle))$$

a platí

- <u>$f$ je spojitá v bodě $(0,0)$</u>

$$[f(x,y) - f(0,0)](t) = f(x,y)(t) =$$

$$= y(t) - x - \int_0^t g(s, y(s))\, ds, \text{ a proto}$$

pro $x \in \mathbb{R}$, $\|y\| \leq 1$ platí:

$$|f(x,y)(t)| \leq \|y\| + |x| + \int_0^1 \underbrace{|g(s,y(s)) - \underbrace{g(s,0)}_{=0}|}_{=\left|\frac{\partial g}{\partial y}(s, \xi(s)) \cdot y(s)\right|} ds \leq$$

$$\leq \|y\| + |x| + \|y\| \cdot \max_{\langle 0,1\rangle \times \langle -1,1\rangle} \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|$$

$$\left|\left(f(x,y)\right)'(t)\right| \leq \|y\| + |g(t,y(t))| = \|y\| + |g(t,y(t)) - g(t,0)| \leq$$
$$\leq \|y\| + \|y\| \cdot \max_{\langle 0,1\rangle \times \langle -1,1\rangle} \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|$$

...

- $f_2'(x,y)$ je spojité v bodě $(0,0)$

Připomeňme si, že $\|f_2'(x,y) - f_2'(0,0)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|(f_2'(x,y) - f_2'(0,0))(h)\|$

Pro $h \in C^1(\langle 0,1\rangle)$, $\|h\| \leq 1$:

$$\left[\left(f_2'(x,y) - f_2'(0,0)\right)(h)\right](t) = -\int_0^t \left[\frac{\partial g}{\partial y}(s,y(s)) - \frac{\partial g}{\partial y}(s,0)\right] h(s)\,ds$$

$$\left[\left(f_2'(x,y) - f_2'(0,0)\right)(h)\right]'(t) = -\left[\frac{\partial g}{\partial y}(t,y(t)) - \frac{\partial g}{\partial y}(t,0)\right] h(t)$$

(funkce $\frac{\partial g}{\partial y}$ je stejnoměrně spojitá na $\langle 0,1\rangle \times \langle -1,1\rangle$)...

- $f_2'(0,0)$ je isomorfismus $C^1(\langle 0,1\rangle)$ na $C^1(\langle 0,1\rangle)$

$$\left(f_2'(0,0)(h)\right)(t) = h(t) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(s,0)\, h(s)\,ds$$

$f_2'(0,0)(h) = 0 \iff h$ je řešením počáteční LINEÁRNÍ úlohy:

$$\begin{cases} h'(t) = \frac{\partial g}{\partial y}(t,0)\,h(t), \\ h(0) = 0, \end{cases}$$

a tato má pouze jediné řešení $h(t) \equiv 0$.

Takže $f_2'(0,0)$ je prosté

Buď nyní $k = k(t) \in C^1(\langle 0,1\rangle)$ libovolná funkce.

Pak $f_2'(0,0)h = k$

$$\Updownarrow$$

$$h(t) - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial y}(s,0)\,h(s)\,ds = k(t)$$

$$\Updownarrow$$

$h$ je řešením LINEÁRNÍ počáteční úlohy

$$\begin{cases} h'(t) = \frac{\partial g}{\partial y}(t,0)\,h(t) + k'(t), \\ h(0) = k(0), \end{cases}$$ a tato má řešení.

Takže $f_2'(0,0)$ je na $C^1(\langle 0,1\rangle)$

$f_2'(0,0)$ je prosté a na, a proto $f_2'(0,0)$ je izomorfismus.

Z věty o implicitní funkci vyplývá:

$$\exists \delta, \varepsilon > 0 \ \forall x \in (-\delta, \delta) \ \exists!\, y = y_x \in C^1(\langle 0,1\rangle), \|y\| < \varepsilon:$$

$y_x$ je řešením úlohy (*)
(na $\langle 0,1\rangle$)

Navíc, zobrazení

$$x \longmapsto y_x \quad : \mathbb{R} \to C^1(\langle 0,1\rangle)$$

je v 0 spojité.

# Věta (o lokálním difeomorfismu)

Nechť

- $X, Y$ jsou Banachovy prostory,
- $f: X \to Y$ je třídy $C^1$ na nějakém okolí bodu $a \in X$,
- $f'(a)$ je izomorfismus $X$ na $Y$ (tj. $f'(a)$ je prosté a na)

Pak existuje otevřená množina $G \subset X$ taková, že $a \in G$ a že

i) $f$ je prosté na $G$,
ii) $f(G) = H$ je otevřená množ. v $Y$
iii) $(f|_G)^{-1} \in C^1(H)$

(tzn. $f$ je difeomorfismus na $G$)

**Důkaz** $f(a) \overset{\text{ozn.}}{=} b$

Chceme řešit $f(x) - y = 0$.

Volme $F(x,y) := f(x) - y$.

Protože $F_1'(a,b) = f'(a)$ ... izomorfismus $X$ na $Y$,

plyne z věty o implicitní funkci, že

$\exists \delta, \varepsilon > 0 \ \forall y \in U(b,\delta) \ \exists! \, x \in U(a,\varepsilon)$:

$$f(x) = y \qquad (x = \varphi(y) \in C^1(U(b,\delta)))$$

a k dokončení důkazu stačí volit

$$G := \{x \in U(a,\varepsilon) : \|f(x) - b\| < \delta\}$$

Cvičení.

- **Příklad** (aplikace věty o lokálním difeomorfismu)

Uvažujme v $C(\langle 0,1\rangle)$ nelineární integrální rovnici

$$(**) \quad x(t) - \int_0^1 k(t,s,x(s))\,ds = y(t),$$

kde

- $k = k(t,s,u)$, $k'_u(t,s,u)$ jsou spojité na $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \times \mathbb{R}$
- $k(t,s,0) = k'_u(t,s,0) = 0$ pro každé $(t,s) \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Pak zobrazení $f : C(\langle 0,1\rangle) \to C(\langle 0,1\rangle)$ definované předpisem

$$(f(x))(t) := x(t) - \int_0^1 k(t,s,x(s))\,ds$$

je třídy $C^1$ na $C(\langle 0,1\rangle)$ a platí

$\forall x, h \in C(\langle 0,1\rangle)$:

$$(f'(x))(h)(t) = h(t) - \int_0^1 k_u'(t,s,x(s))\,h(s)\,ds$$

Navíc:

$f'(0) = Id$ ... identita na $C(\langle 0,1\rangle)$ na $C(\langle 0,1\rangle)$

$f(0) = 0$

Z věty o lokálním difeomorfismu vyplývá, že

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall y \in C(\langle 0,1\rangle),\ \|y\| < \varepsilon\ \exists\ x \in C(\langle 0,1\rangle):$$

$$x \text{ je řešením } (**)$$

(Vlastně jsme dokázali silnější tvrzení:

$\exists\ G, H \subset C(\langle 0,1\rangle)$ otevřené $\forall y \in H\ \exists!\ x \in G$:

$0 \in G$

$0 \in H$ $\qquad$ $x$ je řešením $(**)$

Navíc, zobrazení $y \mapsto x$ je třídy $C^1$ na $H$.)

# VĚTA (o střední hodnotě)

Nechť

- $X, Y$ jsou NLP,
- $f: X \to Y$,
- $a, b \in X$,
- $\forall t \in \langle 0,1 \rangle \ \exists f'(a + t\cdot(b-a))$

Pak

$$\|f(b)-f(a)\|_Y \le \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \|f'(a+t\cdot(b-a))\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|b-a\|_X$$

---

**Důkaz.** Je-li $f(b)-f(a)=0$, je tvrzení zřejmé.

Je-li $f(b)-f(a)\neq 0$, existuje (viz důsledek Hahn-Banachovy věty – Mikrokurs UFA – str. 48) $\varphi \in Y^*$, $\|\varphi\|=1$,

$\varphi(f(b)-f(a)) = \|f(b)-f(a)\|$.

Uvažujme funkci $g(t) \overset{df}{=} \varphi(f(a+t(b-a)))$, $t\in\langle 0,1\rangle$.

Pak $g'(t) = \varphi((f'(a+t(b-a)))(b-a))$, a proto (z Lagrangeovy věty o střední hodnotě)

$$\|f(b)-f(a)\| = g(1)-g(0) \overset{\text{pro nějaké } \xi\in(0,1)}{=} g'(\xi) =$$

$$= \varphi((f'(a+\xi(b-a)))(b-a)) \le \underbrace{\|\varphi\|}_{=1} \cdot \underbrace{\|f'(a+\xi(b-a))\|}_{\le \sup\dots} \cdot \|b-a\|$$

cbd

**Příklad.** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ (\approx \mathbb{R}^2)$

$$f(x) \overset{def}{=} e^{ix}, \quad a = 0, \quad b = 2\pi$$

$$f(b) - f(a) = e^{i2\pi} - e^{0} = 0$$

$$\neq$$

$$f'(\xi) \cdot (b-a) = i e^{i\xi} \cdot 2\pi \neq 0 \quad \text{pro každé } \xi \in \langle 0, 2\pi \rangle$$